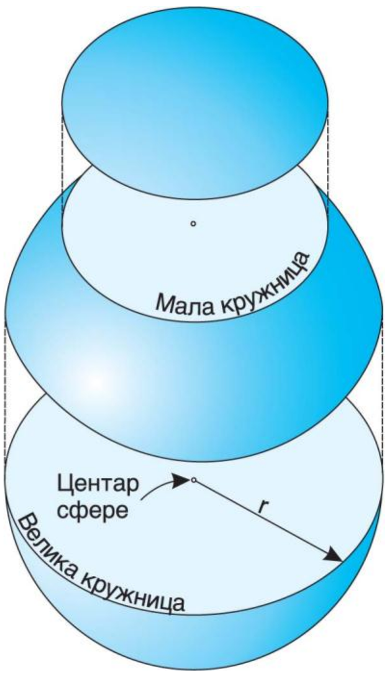
1. УВОД: ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ГЕОМЕТРИЈЕ

Скуп свих тачака равни које су једнако удаљене од једне чврсте тачке у тој равни назива се *кружница*. Та чврста тачка је *центар кружнице*. Растојање било које тачке кружнице од њеног центра назива се *полупречник* или *радијус*. Скуп свих тачака кружнице и њене унутрашњости назива се *круг*. Дуж која спаја две тачке кружнице назива се *тетива*. Најдужа тетива је *пречник* или *дијаметар* кружнице. За тачке које су крајеви дијаметра каже се да су *дијаметрално супротне тачке*. Дијаметрално супротне тачке (крајеви дијаметра) деле кружницу на две *полукружнице*. Крајеви тетиве различите од дијаметра деле кружницу на два неједнака лука. Угао чије је теме у центру кружнице, а чији краци пресецају кружницу назива се *централни угао*. Дужина кружног лука (обим кружнице) израчунава се помоћу формуле $O = 2p\pi$. Права која с кружницом има само једну заједничку тачку назива се *тангента*.

Скуп свих тачака простора које од задате тачке нису удаљене више од задате величине R назива се *лопта* или *кугла*. Та тачка је центар лопте, а задато R је радијус лопте. Скуп свих рубних тачака лопте назива се *сферна површ* или *сфера*. Сфера је централно симетрична у односу на њен центар. Она је и осно симетрична у односу на сваку осу која садржи центар. Сфера има константну закривљеност. Површина сфере је $P = 4R^2\pi$. Радијус, дијаметар, тетива и тангента аналогно се дефинишу као и код кружнице.

Велика кружница



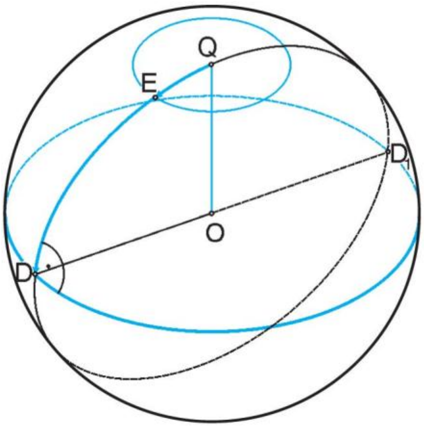
Слика .

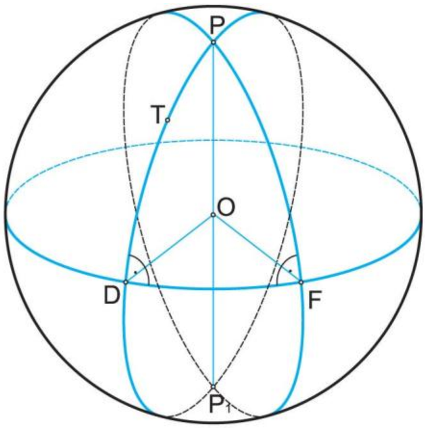
Раван која сече сферу сече је по кружници. Раван која пролази кроз центар сфере сече је по *великој кружници* (сл. 1). Радијус велике кружнице једнак је радијусу сфере. Све велике кружнице имају центар у центру сфере. Сви остали пресеци равни и сфере су *мале кружнице*. За разлику од великих кружница, све мале кружнице имају центре ван центра сфере.

Паралелно свакој малој кружници може се повући безброј других малих и само једна велика кружница. Део сферне површи између велике кружнице и неке њој паралелне мале кружнице назива се *сферни појас*. Свака мала кружница дели сферу на два неједнака дела од којих се мањи назива *сферна капа* или *калота*.

Раван је одређена једном правом и тачком која не лежи на тој правој (тј. са три неколинеарне тачке) па је и велика кружница једнозначно одређена са две тачке сфере које нису дијаметрално супротне. Јер, кроз две тачке сфере које нису дијаметрално супротне и кроз центар сфере пролази само једна раван која је сече по великој кружници, односно кроз две недијаметралне тачке на сферној површини увек се може повући једна велика кружница, и то само једна.

Кружницу на сфери можемо дефинисати као геометријско место тачака једнако удаљених од једне чврсте тачке те сфере. Ова тачка (Q) назива се *сферни центар* дате кружнице (сл. 2). Лук (QE) велике кружнице од сферног центра до било које тачке задате кружнице назива се *сферни радијус* задате кружнице. Концентричне кружнице на сфери имају заједнички сферни центар и леже на паралелним равнима. Сферни радијус (QD) велике кружнице једнак је четвртини њеног обима (квадранту), док су радијуси малих кружница увек мањи од сферног радијуса велике кружнице.

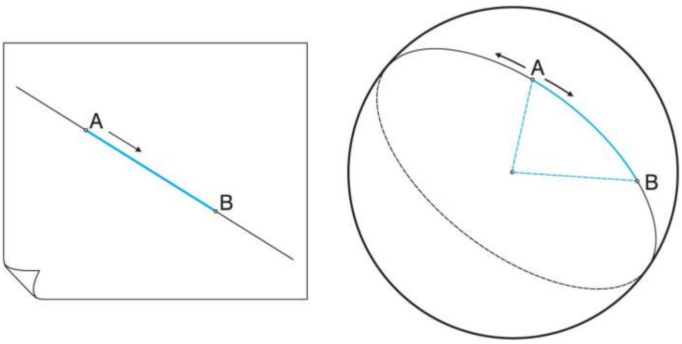




Слика 2 (лево), слика 3 (десно)

Права која садржи дијаметар сфере, а нормална је на раван било које кружнице на сфери назива се *поларном осом* те кружнице (сл. 3). Поларна оса продире сферу у тачкама које се називају *полови кружнице* (P, P_1). Јасно да су код великих кружница полови уједно и сферни центри. Да би их разликовали потребно је лук задате велике кружнице претходно оријентисати.

За задате полове одговарајућа велика кружница се назива *основна* или *поларна кружница*. Основна кружница сваке тачке задате велике кружнице пролази кроз њене полове. Свака велика кружница која пролази кроз полове задате велике кружнице нормална је на ту кружницу. Таквих кружница има бесконачно много. Заједничко име им је *секундарне кружнице* (кружнице PDP_1 и PFP_1 на слици 3). Кроз било коју тачку T сфере може се повући само једна секундарна кружница на задату велику кружницу.



Слика 4

Кроз две тачке на сфери, које нису дијаметрално супротне, може се повући безброј малих кружница и само једна велика кружница. Од лукова свих кружница повучених између те две тачке најкраћи је лук велике кружнице, јер је од свих кружних лукова над том тетивом, најкраћи лук највећег радијуса, а на сфери највећи радијус има велика кружница.

Дакле, најкраћа удаљеност између две тачке на сфери одређена је краћим луком велике кружнице која пролази кроз те тачке. Наглашава се *краћи лук* јер се од једне до друге тачке на сфери може стићи идући по великој кружници у два смера (сл. 4). Ова удаљеност се назива *сферна удаљеност*. А сферна удаљеност дате тачке од дате велике кружнице једнака је величини лука њене секундарне кружнице од те тачке до те кружнице (лук TD на слици 3).

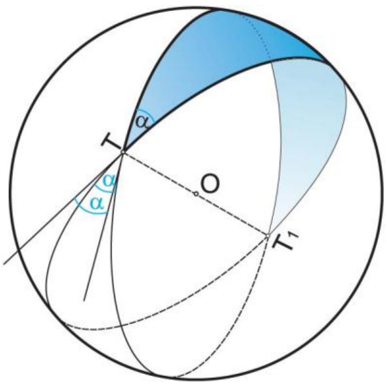
У сферној геометрији улогу правих линија имају велике кружнице, с тим што нема паралелних великих кружница. Дужима одговарају луци великих кружница којима одговара централни угао мањи од 180°.

Пошто су све велике кружнице једне сфере међусобно једнаке, њихови лукови се изражавају припадајућим централним угловима. Сферна удаљеност се изражава у угаоној мери – у степенима (1° је 360-ти део пуног круга), минутама (1'=1/60°) и секундама (1''=1/60'). У последње време, нарочито у компјутерским програмима, степени се изражавају у децималном облику. Тако се угао од 45°24'36'' може да напише као 45°,41. Највећа сферна удаљеност је 180°. Да би се угаона мера сферне удаљености ($\alpha°$) превела у дужинску меру (mm, cm, m...), потребно је знати радијус сфере,

$$l = r\,\frac{\alpha°}{\rho°}\,,$$

где је $\rho°$ радијан – централни угао коме припада лук дужине једнаке радијусу кружнице (ρ°= 57°17'44.''8 = 57°,29578 = 3437',7468).

Сферни двоугао



Слика 5

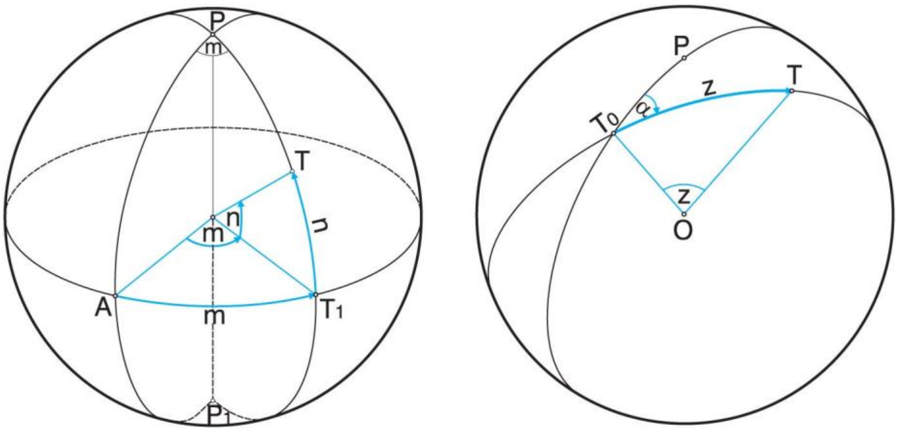
Сферни угао је угао на сфери настао пресеком две велике кружнице (сл. 5). Тачка T пресека је теме сферног угла, а луци великих кружница који га формирају су његови краци. Сферни угао се изражава равним углом кога заклапају тангенте на кракове у његовом темену, или углом између равни његових кракова, или луком кога одсецају кракови на основној кружници њиховог темена. У сва три случаја се подразумева угао (или лук) мањи од 180°.

Две велике кружнице се секу у дијаметрално супротним тачкама. Оне се међусобно полове и деле сферу на четири области које се називају *сферни двоуглови*. Сваки сферни двоугао има два врха (дијаметрално супротне тачке сфере), две једнаке стране од по 180° и два једнака сферна угла. Површина сферног двоугла односи се према површини сфере као његов сферни угао према пуном углу:

$$P = \frac{r^2 \pi \alpha°}{90°}\,.$$

Сферни координатни систем

Оно што су осе правоуглог координатног система у равни то су на сфери две међусобно ортогоналне велике кружнице (сл. 6). *Сферни координатни систем* генерисан је погодно одабраном поларном осом ($ПП_1$) чијим половима одговара основна кружница – *прва основна кружница* (што одговара оси апсциса у правоуглом Декартовом координатном систему). На њој је одређен координатни почетак (A) као пресек прве основне кружнице с једном њеном секундарном кружницом – *другом основном кружницом* (што одговара оси ордината у правоуглом Декартовом координатном систему). Како се свака тачка сфере налази на пресеку једне кружнице паралелне првој основној кружници и једне секундарне кружнице, то је положај те тачке на сфери одређен уређеним паром (n, m) – *сферним координатама* тачке А.



Слика 6 (лево), слика 7 (десно)

Прва сферна координата је сферна опсциса (n) – одређена као сферна удаљеност задате тачке од прве основне кружнице (лук TT_1 секундарне кружнице од задате тачке од прве основне кружнице). Њена нумеричка вредност креће се у границама од 0° до ±90°. Прва сферна координата је позитивна за све тачке на хемисфери која садржи пол изабран као темени.

Друга основна кружница и секундарна кружница прве основне кружнице која пролази кроз задату тачку образују сферни двоугао. Лук AT_1 кога на првој основној кружници одсецају поменуте кружнице представља другу сферну координату – сферну ординату (m). Друга сферна координата такође може бити одређена сферним углом поменутог сферног двоугла или просторним углом (диедром) што га чине полуравни које садрже кракове тог сферног угла. Нумеричка вредност ове координате креће се од 0° до ±180°, при чему се сматра да је координатни систем оријентисан.

На површи сфере (исто као и у равни) положај неке тачке може бити одређен и *поларним сферним координатама*. За то је потребно на сфери изабрати две тачке – једну (T_0) која ће представљати координатни почетак (пол) поларног сферног координатног система и другу (П) која заједно с првом тачком одређује почетну велику кружницу (сл. 7). Положај било које тачке (Т) на сфери одређен је њеном *сферном удаљеношћу* (*z*) од координатног почетка и *сферним углом* (α) кога у координатном почетку као темену образују почетна кружница и велика кружница која пролази координатним почетком и задатом тачком. Прва сферна координата узима вредности у размаку од 0° до 180°. Друга сферна координата се мери од почетне кружнице у смеру кретања казаљке на часовнику, од 0° до 360°.

Кључни појмови

Српски	**Енглески**
сфера	*sphere*
велика кружница	*great circle*
мала кружница	*small circle*
сферни угао	*spherical angle*
сферне координате	*spherical coordinates*
сферни троугао	*spherical triangle*
сферна тригонометрија	*spherical trigonometry*
пол	*pole*
поларна оса	*polar axis*